Arithmetische Folge

(Differenz oder Abstand)

d

$$\begin{array}{llll}
a_1 = & 2 & & = 2+0\cdot 4 \\
 & &)+4 & \\
a_2 = & 6 & & = 2+1\cdot 4 \\
 & &)+4 & \\
a_3 = & 10 & & = 2+2\cdot 4 \\
 & &)+4 & \\
a_4 = & 14 & & = 2+3\cdot 4 \\
 & &)+4 & \\
a_5 = & 18 & & = 2+4\cdot 4 \\
\vdots & & & \vdots \\
a_8 = & & & = 2+7\cdot 4 \\
\vdots & & & \vdots \\
a_n = & & & = 2+(n-1)\cdot 4
\end{array}$$

allg: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$

n-tes Glied der arithmetischen Folge

Geometrische Folge

q (Faktor)

$a_1 = 1 \qquad = 1 \cdot 2^0$

$\cdot 2$

$a_2 = 2 \qquad = 1 \cdot 2^1$

$\cdot 2$

$a_3 = 4 \qquad = 1 \cdot 2^2$

$\cdot 2$

$a_4 = 8 \qquad = 1 \cdot 2^3$

$\cdot 2$

$a_5 = 16 \qquad = 1 \cdot 2^4$

$\vdots \qquad \vdots$

$a_8 = \qquad = 1 \cdot 2^7$

$\vdots \qquad \vdots$

$a_n = \qquad = 1 \cdot 2^{n-1}$

allg:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

n-tes Glied der geometrischen Folge

Wie testet man eine Folge?

Vermutung: arithmetische Folge

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ a_2 &= 12 \\ a_3 &= 19 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\big) +7 \\ &\big) +7 \end{aligned}$$

Test:

$$\left.\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 12 - 5 = 7 \\ a_3 - a_2 &= 19 - 12 = 7 \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= \quad = 7 \end{aligned}\right\} \text{konstant } +7$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{d = 7}} \quad \text{(arithmetische Folge)}$$

Vermutung: geometrische Folge

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ a_2 &= 15 \\ a_3 &= 45 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\big) \cdot 3 \\ &\big) \cdot 3 \end{aligned}$$

Test:

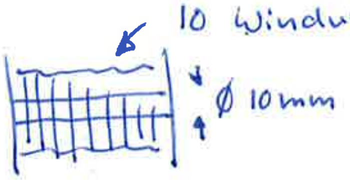
$$\left.\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &= \frac{15}{5} = 3 \\ \frac{a_3}{a_2} &= \frac{45}{15} = 3 \\ &\vdots \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \quad = 3 \end{aligned}\right\} \text{konstant } \cdot 3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{q = 3}} \quad \text{(geometrische Folge)}$$

Bem: wenn beide Ansätze keine konstante Zahl ergeben, dann ist es weder eine AF noch eine GF.

Beispiel: Drahtspule

Eine Drahtspule soll gewickelt werden. Wie viel Draht benötigt man?



10 Windungen pro Lage, insgesamt 20 Lagen
(Drahtdicke 1 mm)

1. Lage
1 Windung = 10 mm · π ; π = 3.14
10 Windungen = 10 · 10 · π = 314 mm

+62.8

2. Lage
1 Windung = 12 mm · π
10 Windungen = 10 · 12 · π = 376.8 mm

+62.8

3. Lage
1 Windung = 14 mm · π
10 Windungen = 10 · 14 · π = 439.6 mm

4. Lage = 502.4 mm
5. Lage = 565.2 mm
6. Lage = 628 mm
⋮
19. Lage = 1444.4 mm
20. Lage = 1507.2 mm

18'212 mm

(= 18,212 m)

Arithmetische Reihe

Der Lehrer der Dorfschule liess die Schüler die Zahlen 1 bis 100 addieren. Der Schüler Johann Carl Friedrich Gauß (* 1777 Braunschweig, † 1855 Göttingen) fand folgenden Ansatz:

$$\overset{\text{Summe}}{S} = \overset{a_1}{1} + \overset{a_2}{2} + \overset{a_3}{3} + \dots \quad \dots + \overset{a_{n-1}}{99} + \overset{a_n}{100}$$

$$+ \quad S = 100 + 99 + 98 + \dots \quad \dots + 2 + 1$$

$$2S = \underbrace{101 + 101 + 101 + \dots \quad \dots + 101 + 101}_{100 \text{ mal } (n)}$$

$$2S = 100 \cdot 101$$

$$S = \frac{\overset{n}{100} \cdot \overset{a_1 + a_n}{101}}{2}$$

$$= \underline{\underline{5050}}$$

n steht für die Anzahl Glieder

<u>allg.</u>

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

<u>Bem:</u> Die Summe der Glieder einer arithmetischen Folge heisst <u>arithmetische Reihe</u>.

<u>Beispiel</u> "Drahtspule"

20 Lagen

Drahtlänge der 1. Lage

$$S_{20} = \frac{20}{2}(314 + 1507{,}2)$$

$$= \underline{\underline{18'212 \text{ mm}}}$$

Summe der 1. bis zur 20. Lage (gesamte Länge)

Drahtlänge der letzten Lage

Prost!

5 Gäste an einer Party stossen an. Wie oft erklingen die Gläser?

Folge	Reihe
$a_1 = 4$	$S_1 = 4$
$a_2 = 3$	$S_2 = 7$
$a_3 = 2$	$S_3 = 9$
$a_4 = 1$	$S_4 = 10$ => **10 mal**

Der 1. Gast stösst mit 4 Gästen an.

Der Nächste stösst noch mit 3 Gästen an

.. mit 2 Gästen..

.. mit 1 Gast..

Wir können auch die Summenformel anwenden:

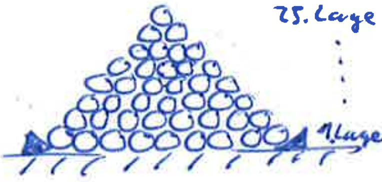
$$S_4 = \frac{\overset{n}{4}}{2}\left(\overset{a_1}{4}+\overset{a_n}{1}\right)$$

$$= \underline{\underline{10}}$$

Flaschenstapel

Flaschen liegen aufeinander gestapelt. In der untersten Reihe liegen 25 Flaschen. Darüber liegen 24 Flaschen, dann 23 Flaschen, etc. Wie viele Flaschen sind es insgesamt?

Folge	Reihe
$a_1 = 25$	$S_1 = 25$
$a_2 = 24$	$S_2 = 59$
$a_3 = 23$	$S_3 = 82$
$\vdots$	$\vdots$
$a_{25} = 1$	



$$S_{25} = \frac{\overset{\text{Anzahl Lagen}}{25}}{2}\left(\overset{\text{1. Lage }(a_1)}{25}+\overset{\text{2.Lage }(a_{25})}{1}\right)$$

$$= \underline{\underline{325 \text{ Flaschen}}}$$

Die legende vom Schachspiel

Der Erfinder des Schachspiels sollte sich eine Belohnung wählen. Er wünschte sich vom König auf das erste Feld des Schachbretts 1 Weizenkorn, auf das zweite Feld 2 Körner, auf das dritte Feld 4 Körner, usw..

a) Wie viele Körner sind es insgesamt?

b) Wie viel wiegt die Gesamtmenge, wenn 1kg Weizen ca. 20'000 Körner sind?

$a_1 = 1 \quad = 1\cdot 2^0$

$a_2 = 2 \quad = 1\cdot 2^1$

$a_3 = 4 \quad = 1\cdot 2^2$

$a_4 = 8 \quad = 1\cdot 2^3$

$\vdots$

$a_{64} = \quad = 1\cdot 2^{63}$ ← so viele Körner liegen auf dem letzten Feld!

Wir summieren alle Felder auf:

$$S_n = 1\cdot\overset{q}{\boxed{2}}{}^0 \overset{0}{+} 1\cdot 2^1 \overset{0}{+} 1\cdot 2^2 + \ldots \quad \ldots \overset{0}{+} 1\cdot 2^{62} \overset{0}{+} 1\cdot 2^{63}$$

$$-\overset{q}{\boxed{2}}\cdot S_n = -1\cdot 2^1 - 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3 - \ldots \quad \ldots -1\cdot 2^{63} - 1\cdot 2^{64}$$

$$S_n - 2\cdot S_n = \overset{a_1}{\boxed{1}}\cdot 2^0 - \overset{a_1}{\boxed{1}}\cdot 2^{64}$$

$$S_n(1-2) = 1 - 2^{64}$$

$$\boxed{S_n = 1\cdot\frac{1-2^{64}}{1-2}}$$ ← Die Summe aller Körner auf sämtlichen Feldern

allg. $\boxed{S_n = q_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$ (Geometrische Reihe)

Bem: Die Summe aller Glieder einer geometrischen Folge nennt man geometrische Reihe.

Bezogen auf das Schachspiel:

geometrische Folge	geometrische Reihe
$a_1 = 1$	$s_1 = 1$
$a_2 = 2$	$s_2 = 3$
$a_3 = 4$	$s_3 = 7$
$a_4 = 8$	$s_4 = 15$
$a_5 = 16$	$s_5 = 31$
$\vdots$	$\vdots$

Insgesamt sind es also:

a) $S_{64} = 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2}$

$= 2^{64} - 1$

$\approx 2^{64}$

$= 1.8 \cdot 10^{19}$ Körner

$= 1.8 \cdot 10'\underbrace{000'\underbrace{000'\underbrace{000'\underbrace{000'\underbrace{000'\underbrace{000}_{\text{Tsd}}}_{\text{Mio}}}_{\text{Mrd}}}_{\text{Bio}}}_{\text{Brd}}}_{\text{Trd}}$

= 18 Trio. Körner

b) $\frac{18 \cdot 10^{18}}{2 \cdot 10^4} = 9 \cdot 10^{14}$ kg

$= 9 \cdot 10^{11}$ t

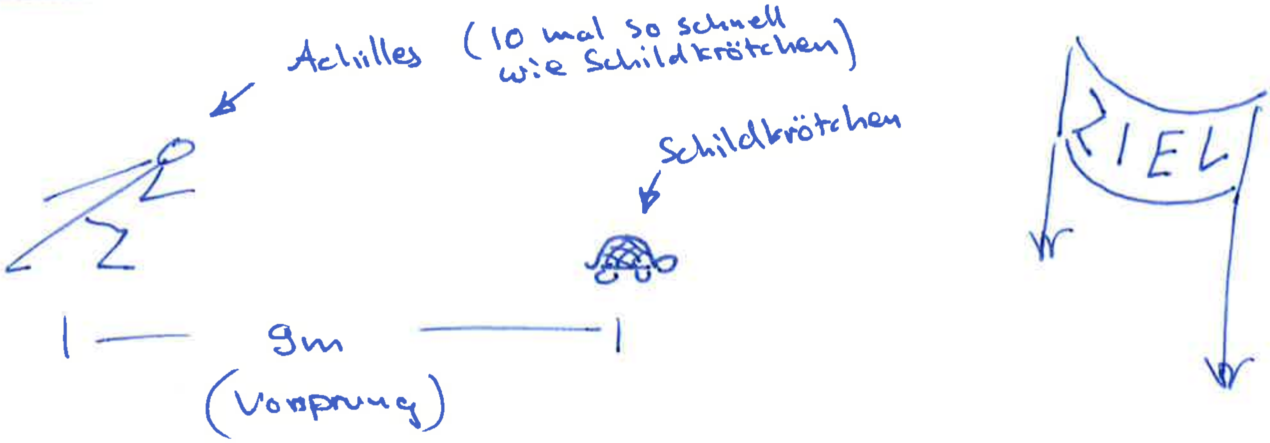
= 900 Mrd t

1 Supertanker fasst ca 400000 t

$\Rightarrow \frac{9 \cdot 10^{11} \text{ t}}{4 \cdot 10^5 \text{ t/ST}} = 2{,}25 \cdot 10^6$

= 2.25 Mio. ST!

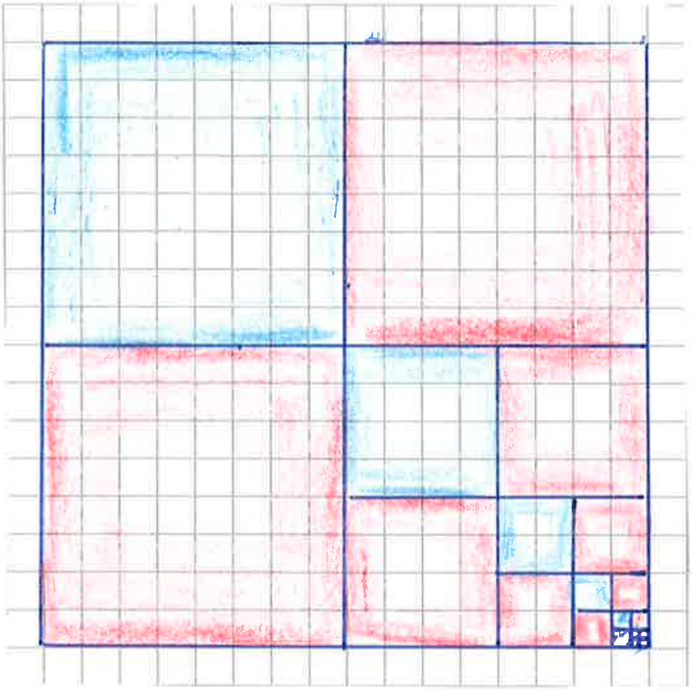
Achilles und Schildkrötchen



wenn:	dann:
0m	9m
9 m	9,9m
9,9m	9,99m
9,99m	9,999 m
9,999 m	9,9999 m
⋮	⋮

Kann Achilles Schildkrötchen einholen? Und wenn ja, wo holt er Schildkrötchen ein?

Unendliche Reihen



Wir summieren die blauen Quadrate.

$a_1 = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0$

$a_2 = \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1$

$a_3 = \frac{1}{64} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$a_n = \quad = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$S_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}$$

bei n→∞ wird dieser Teil verschwindend klein

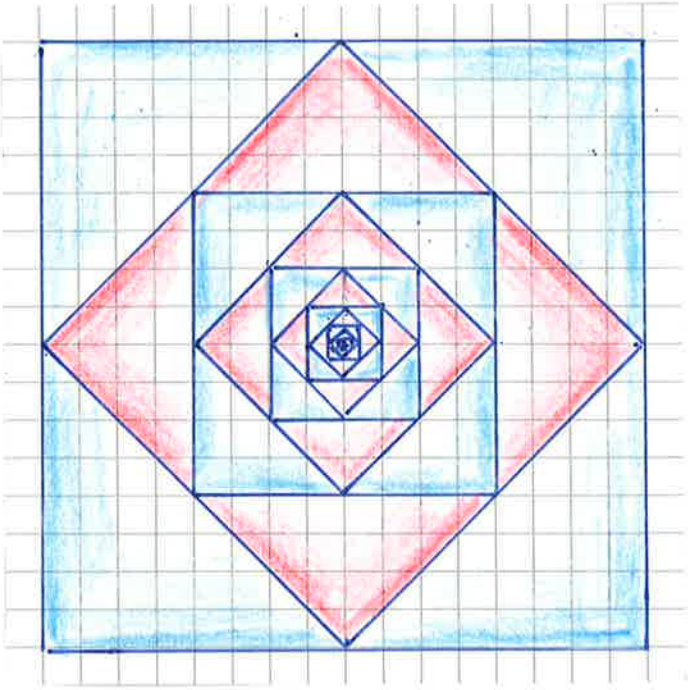
$$S_{n \to \infty} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^n}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$



Wir summieren die blauen Quadrate.

$$a_1 = 1 = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0$$

$$a_2 = \frac{1}{4} = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1$$

$$a_3 = \frac{1}{16} = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$a_n = \quad = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$S_n = 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}$$

bei $n \to \infty$ wird dieser Teil verschwinded klein

$$S_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \frac{1-\boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^n}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{4}{3}$$

Periodische Dezimalbrüche

Ansatz: $0,\overline{11} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots$

Folge

$a_1 = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^0$

$a_2 = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1$

$a_3 = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2$

$\vdots$

$a_n = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

Reihe

$s_1 = \frac{1}{10}$

$s_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{100}$

$s_3 = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$

$\vdots$

$S_n = \frac{1}{10} \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10} \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$$

$\Longrightarrow \quad 0,\overline{11} = \frac{1}{9}$

$0,111\ldots = \frac{1}{9}$

Ansatz: $0,\overline{45} = \underbrace{\frac{45}{100} + \frac{45}{10000}}_{\cdot \frac{1}{100}} \underbrace{+ \frac{45}{1000000}}_{\cdot \frac{1}{100}} + \dots$

$$\Rightarrow S_\infty = \frac{45}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{45}{100} \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}}$$

$$= \frac{45}{100} \cdot \frac{100}{99}$$

$$= \underline{\underline{\frac{45}{99}}}$$

Ansatz: $0,\overline{243}.. = \underbrace{\frac{243}{10^3} + \frac{243}{10^6}}_{\cdot \frac{1}{10^3}} \underbrace{+ \frac{243}{10^9}}_{\cdot \frac{1}{10^3}}$

$$\Rightarrow S_\infty = \frac{243}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^3}}$$

$$= \frac{243}{10^3} \cdot \frac{1}{\frac{999}{10^3}}$$

$$= \frac{243}{10^3} \cdot \frac{10^3}{999}$$

$$= \underline{\underline{\frac{243}{999}}}$$