Lösungen quadratischer Gleichungen

Frage: Was ist die Wurzel von 4?
(d.h. was mal was ergibt 4?)

Antwort: 1.) $2 \cdot 2 = 4$
2.) $(-2) \cdot (-2) = 4$

4 kann zwei Wurzeln haben: 2 und -2

Also: $x^2 = 4$ hat zwei Lösungen

$x = \pm 2$

$\mathbb{L} = \{2; -2\}$ (Lösungsmenge)

Beispiele:

(1)

$$x^2 = 9 \quad |\sqrt{\ldots}$$
$$x = \pm 3$$
$$\mathbb{L} = \{3; -3\}$$

Probe:

$$3^2 = 9$$
$$9 = 9 \checkmark$$
$$(-3)^2 = 9$$
$$9 = 9 \checkmark$$

(2)

$$2x^2 = 72 \quad |:2$$
$$x^2 = 36 \quad |\sqrt{\ldots}$$
$$x = \pm 6$$
$$\mathbb{L} = \{6; -6\}$$

Probe:

$$2 \cdot 6^2 = 72$$
$$2 \cdot 36 = 72$$
$$72 = 72 \checkmark$$
$$2 \cdot (-6)^2 = 72$$
$$2 \cdot 36 = 72$$
$$72 = 72 \checkmark$$

(3)

$$x^2 - 25 = 0 \quad | :+25$$
$$x^2 = 25 \quad |\sqrt{\ldots}$$
$$x = \pm 5$$
$$\mathbb{L} = \{5; -5\}$$

Probe:

$$5^2 - 25 = 0$$
$$25 - 25 = 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$
$$(-5)^2 - 25 = 0$$
$$25 - 25 = 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

(4) $(x+4)^2 = 16 \quad | \sqrt{\ldots}$

$x + 4 = \pm 4 \quad | -4$

$x = -4 \pm 4$

$\mathbb{L} = \{0; -8\}$

Probe: $(0+4)^2 = 16$

$16 = 16$ ✓

$(-8+4)^2 = 16$

$4^2 = 16$

$16 = 16$ ✓

(5) $(x-2)^2 = 9 \quad | \sqrt{\ldots}$

$x - 2 = \pm 3 \quad | +2$

$x = 2 \pm 3$

$\mathbb{L} = \{5; -1\}$

Probe: $(5-2)^2 = 9$

$3^2 = 9$

$9 = 9$ ✓

$(-1-2)^2 = 9$

$(-3)^2 = 9$

$9 = 9$ ✓

(6) $(x-7)^2 = 5 \quad | \sqrt{\ldots}$

$x - 7 = \pm\sqrt{5} \quad | +7$

$x = 7 \pm \sqrt{5}$

$\mathbb{L} = \{7+\sqrt{5}; 7-\sqrt{5}\}$

Probe: $(7+\sqrt{5}-7)^2 = 5$

$(\sqrt{5})^2 = 5$

$5 = 5$ ✓

$(7-\sqrt{5}-7)^2 = 5$

$(-\sqrt{5})^2 = 5$

$5 = 5$ ✓

Quadratische Ergänzung

$$(x+1)^2 = (x+1)(x+1)$$
$$= x^2 + x + x + 2$$
$$= \underline{\underline{x^2 + 2x + 2}}$$

Umkehrung der Fragestellung führt zu:

$$x^2 + 2x + 2 = (x + ?)(x + ?)$$
$$= (x+1)(x+1)$$
$$= \underline{\underline{(x+1)^2}}. \qquad (1. \text{ Binom})$$

Gegeben die quadratische Gleichung:

$x^2 + 8x = 0$ | wir ergänzen quadratisch, d.h. $+16$

$\boxed{x^2 + 8x + 16 = +16}$ quadratische Ergänzung, weil..

$x^2 + 8x + 16 = (x+4)(x+4)$

$= (x+4)^2$ .. man daraus sofort die Wurzel ziehen kann!

$\boxed{(x+4)^2 = 16}$ | $\sqrt{..}$

$x + 4 = \pm 4$ | -4

$x = -4 \pm 4$

$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{0; -8\}}}$

Beispiele:

(1)

$$x^2 + 2x = 2 \qquad | \text{QE}$$

$$x^2 + 2x + 2 = 2 + 2 \qquad | \text{zus., Binom}$$

$$(x+1)^2 = 4 \qquad | \sqrt{..}$$

$$x + 1 = \pm 2 \qquad | -1$$

$$x = -1 \pm 2$$

$$\mathbb{L} = \{1; -3\}$$

(2)

$$x^2 + 4x = 10 \qquad | \text{QE}$$

$$x^2 + 4x + 4 = 10 + 4 \qquad | \text{zus., Binom}$$

$$(x+2)^2 = 16 \qquad | \sqrt{..}$$

$$x + 2 = \pm 4 \qquad | -2$$

$$x = -2 \pm 4$$

$$\mathbb{L} = \{2; -6\}$$

(3)

$$2x^2 + 6x = \frac{7}{2} \qquad | :2$$

$$x^2 + 3x = \frac{7}{4} \qquad | \text{QE}$$

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \frac{7}{4} + \frac{9}{4} \qquad | \text{Zus., Binom}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 4 \qquad | \sqrt{..}$$

$$x + \frac{3}{2} = \pm 2 \qquad | -\frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm 2$$

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}; -\frac{7}{2}\right\}$$

Gemischt quadratische Gleichungen

dies ist kein Binom!

Bsp $x^2 + 12x - 28 = 0 \quad | +28$

$x^2 + 12x + 36 = 28 + 36 \quad | +36$

$(x+6)^2 = 64$

$x + 6 = \pm 8$

$x = -6 \pm 8$

$\mathbb{L} = \{2; -14\}$

Probe:

$x = 2$: $(2+6)^2 = 64$

$8^2 = 64$

$64 = 64$ ✓

$x = -14$: $(-14+6)^2 = 64$

$(-8)^2 = 64$

$64 = 64$ ✓