(1) $\boxed{\text{Logarithmen}}$

Logarithmen sind Ersatzzahlen!

Basis → $2^0 = 1$ (Ersatzzahl)	$\Longrightarrow$	$0 = \log_2(1)$
$2^1 = 2$		$1 = \log_2(2)$
$2^{1{,}585} \approx 3$		$1{,}585 \approx \log_2(3)$
$2^2 = 4$		$2 = \log_2(4)$
$2^{2{,}322} \approx 5$		$2{,}322 \approx \log_2(5)$
$2^{2{,}585} \approx 6$		$2{,}585 \approx \log_2(6)$
$2^{2{,}8075} \approx 7$		$2{,}8075 \approx \log_2(7)$
$2^3 = 8$		$3 = \log_2(8)$
$2^{3{,}17} \approx 9$		$3{,}17 \approx \log_2(9)$
$2^{3{,}222} \approx 10$		$3{,}222 \approx \log_2(10)$

<u>Bem:</u> Wir haben ein System von Ersatzzahlen gefunden, welche als Potenz zur Basis 2 die natürlichen Zahlen 1,2,3,... ergeben.

Ersatzzahl (Logarithmus) von 16 zu Basis 2

Beispiele:

$\log_4(16) = 2$, denn $4^2 = 16$

$\log_3(81) = 4$, denn $3^4 = 81$

$\log_2(64) = 6$, denn $2^6 = 64$

$\log_3(27) = 3$, denn $3^3 = 27$

(2) $\boxed{\text{Logarithmen: Multiplikation / Division}}$

Multiplikation:

$$8 \cdot 32 = 256$$

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8$$

Potenzregel

$$2^{3+5} = 2^8$$

$$\log_2(8) + \log_2(32) = \log_2(256)$$

oder: $\log_2(8) + \log_2(32) = \log_2(8 \cdot 32)$

allg: $\boxed{\log_n(a) + \log_n(b) = \log_n(a \cdot b)}$

Division:

$$\frac{256}{8} = 32$$

$$\frac{2^8}{2^3} = 2^5$$

Potenzregel

$$2^{8-3} = 2^5$$

$$\log_2(256) - \log_2(8) = \log_2(32)$$

oder: $\log_2(256) - \log_2(8) = \log_2\left(\frac{256}{8}\right)$

allg: $\boxed{\log_n(a) - \log_n(b) = \log_n\left(\frac{a}{b}\right)}$

(3) $\boxed{\text{Logarithmen: Potenzen (Wurzeln)}}$

Potenzen:

$$(2^3)^2 = 2^6$$

Potenzregel

$$2^{3\cdot 2} = 2^6$$

$$3 \cdot 2 = 6$$ (Ersatzzahlen)

$$\log_2(8) \cdot 2 = \log_2(64)$$

$$\Rightarrow \log_2(8) \cdot 2 = \log_2(8^2)$$; weil $8^2 = 64$

allg. $\boxed{n \cdot \log_a(b) = \log_a(b^n)}$

Wurzeln:

$$\sqrt[2]{2^6} = 2^3$$

Potenzregel

$$2^{\frac{6}{2}} = 2^3$$

$$\frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{\log_2(64)}{2} = \log_2(8)$$

$$\frac{\log_2(64)}{2} = \log_2\left(\sqrt[2]{64}\right)$$

allg: $\boxed{\frac{\log_a(b)}{n} = \log_a\left(\sqrt[n]{b}\right)}$

(4) Logarithmen: Wachstum

Bakterienkultur: am Anfang 50 Mio, vermehrt sich stündlich um 80%.

diskret

Bestand am Anfang

$N_1 = 50$

Wachstumsrate

$N_2 = 50 \cdot 1{,}8$

$N_3 = 50 \cdot 1{,}8^2$

$\vdots$

$N_n = 50 \cdot (1{,}8)^{n-1}$

Anzahl Stunden

Anzahl Bakterien

Anzahl Stunden

$\Longrightarrow$

kontinuierlich

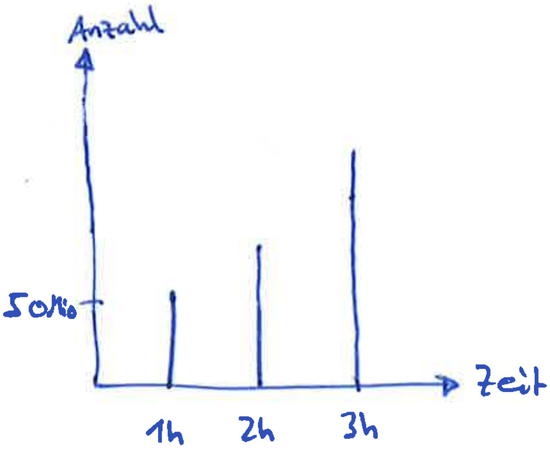
Anzahl Bakterien ... zur Zeit t

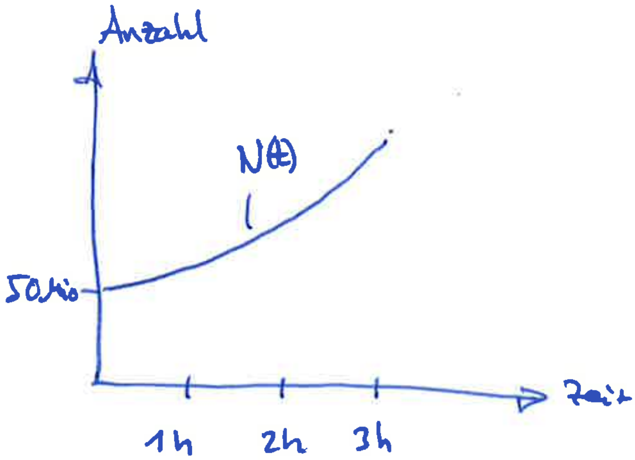
Zeit in Stunden

$N(t) = 50 \cdot 1{,}8^t$

Wachstumsrate

Bestand am Anfang





Frage: nach welcher Zeit hat sich die Anzahl Bakterien verdoppelt?

$$N(t) \overset{!}{=} 2 \cdot 50 \text{ Mio}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 50 = 50 \cdot 1{,}8^t \quad | :50$$

$$2 = 1.8^t \quad | \log_n$$

$$\log_n(2) = \log_n(1.8^t) \quad | \text{ Logarithmen: Potenzen}$$

$$\log_n(2) = t \cdot \log_n(1.8) \quad | : \log_n(1.8)$$

$$t = \frac{\log_n(2)}{\log_n(1.8)}$$

$$= 1.178.. \text{ h}$$

$$= \underline{\underline{1\text{h } 10' \ 45''}}$$

Frage: nach welcher Zeit hat sich die Anzahl verzehnfacht?

$$N(t) \overset{!}{=} 10 \cdot 50 \text{ Mio}$$

$$\Rightarrow 10 \cdot 50 = 50 \cdot 1{,}8^t$$

$$10 = 1.8^t$$

$$\vdots$$

$$t = \frac{\log_n(10)}{\log_n(1.8)}$$

$$= 3{,}917.. \text{ h}$$

$$= \underline{\underline{3\text{h } 55' \ 3''}}$$

(5) Logarithmus Naturalis

Stellen wir uns vor, wir finden eine Bank, die unser Vermögen zu 100% verzinst. D.h., nach einem Jahr hätte sich unser Vermögen verdoppelt.

Jahre	
0	K
1	$K \cdot 2$

Falls die Bank einwilligt, die Zinsen bereits nach einem halben Jahr zu vergüten:

Jahre	
0	K
$\frac{1}{2}$	$K \cdot (1 + \frac{1}{2})$
1	$K \cdot (1 + \frac{1}{2})^2 = K \cdot 2.25$

... oder nach einem $\frac{1}{4}$-Jahr:

Jahre	
0	K
$\frac{1}{4}$	$K \cdot (1 + \frac{1}{4})^1$
$\frac{2}{4}$	$K \cdot (1 + \frac{1}{4})^2$
$\frac{3}{4}$	$K \cdot (1 + \frac{1}{4})^3$
$\frac{4}{4}$	$K \cdot (1 + \frac{1}{4})^4 = K \cdot 2.44..$

... oder jeden Monat, so erhalten wir:

Jahre	
0	K
$\vdots$	
$\frac{24}{24}$	$K \cdot (1 + \frac{1}{12})^{12} = K \cdot 2.61..$

... bei täglicher Verzinsung wären es dann:

Jahre	
0	K
⋮	
365/365	$K \cdot \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = K \cdot 2{,}71456\ldots$

Bei augenblicklicher Verzinsung, d.h. die Zinsen werden ohne Verzögerung fortlaufend gutgeschrieben, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} K \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = K \cdot 2{,}71828\ldots$$

Das Vermögen wächst also insgesamt um den Faktor $2.718\ldots = e$ (Euler Zahl) pro Jahr.

Bem: Man findet dieses Verhalten tatsächlich in der Natur bei allen natürlichen Wachstumsprozessen, da nach einer Zellteilung die neuen Zellen augenblicklich für eine weitere Zellteilung zur Verfügung stehen.

Wir haben also das entsprechende System von Ersatzzahlen:

Logarithmus Naturalis

$$\begin{array}{lll} e = 2{,}718\ldots & \Longrightarrow & \ln(e^1) = 1 \\ e^2 = 2{,}718\ldots^2 & & \ln(e^2) = 2 \\ e^3 = 2{,}718\ldots^3 & & \ln(e^3) = 3 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$