

(1)

Positive und negative Exponenten

$$\text{Potenz} = \text{Basis}^{\text{Exponent (Hochzahl)}} \\ \text{(Grundzahl)}$$

Bsp: Potenz = 2^3
 $= 2 \cdot 2 \cdot 2$

"normale Zahl" = 8

Beobachtung:

Hochzahl

$$\begin{array}{l} +1 \uparrow \\ 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \quad \uparrow \cdot 2 \\ \hline 2^2 = 2 \cdot 2 = 4 \\ -1 \downarrow \\ 2^1 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \quad \downarrow : 2 \\ -1 \downarrow \\ 2^0 = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 1 \quad \downarrow : 2 \\ -1 \downarrow \\ 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad \downarrow : 2 \\ -1 \downarrow \\ 2^{-2} = \frac{1}{4} \quad \downarrow : 2 \\ -1 \downarrow \\ 2^{-3} = \frac{1}{8} \quad \downarrow : 2 \end{array}$$

(2)

Potenzregeln

Bsp: $2^4 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
 $= 2^6$

(Exponenten: $4+2=6$)

(I) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Bsp: $2^4 \cdot 4^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$
 $= 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4$
 $= (2 \cdot 4)^4$

(II) $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

Bsp: $\frac{2^4}{2^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}}$

$= 2^2$

(Exponenten: $4-2=2$)

(III) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Bsp: $\frac{2^4}{5^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$
 $= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$
 $= \left(\frac{2}{5}\right)^4$

(IV) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

Bsp: $17^0 = 1$
 $82^0 = 1$
 $63^0 = 1$
⋮

(V) $a^0 = 1$

Bsp: $(2^4)^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)^2$
 $= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$
 $= 2^8$

(Exponenten: $4 \cdot 2 = 8$)

(VI) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Bsp :

$$\underline{\underline{\frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{2^5}{2^5}}}$$

$$= \frac{2^5}{2^3 \cdot 2^5}$$

$$\downarrow$$
$$= \frac{2^5}{2^8}$$

$$\text{Resol(II)}$$
$$\downarrow$$
$$= 2^{5-8}$$

$$= \underline{\underline{2^{-3}}}$$

VII

$$\boxed{\frac{1}{a^n} = a^{-n}}$$

(3)

Exponentialdarstellung

Bsp 1:

100%
↓
10%
↓
1%
↓
1‰
23'58'729

$$\approx 23,6 \text{ Mio}$$

$$= 23,6 \cdot 10^6$$

$$= \underline{\underline{2,36 \cdot 10^7}}$$

(Exponentialdarstellung)

Bsp 2:

$$\approx 300'000 \text{ km/s (Lichtgeschwindigkeit)}$$

$$= 299'792 \text{ km/s}$$

$$= 2,99 \cdot 10^5 \text{ km/s}$$

$$= 2,99 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

$$= \underline{\underline{2,99 \cdot 10^8 \text{ m/s}}}$$

Bsp 3:

$$90'000 \cdot 50'000$$

(Multiplikation)

$$= 9 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^4$$

$$= 9 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 10^4$$

$$= 45 \cdot 10^8$$

$$= \underline{\underline{4,5 \cdot 10^9}}$$

Bsp4:

$$\frac{90000}{500}$$

(Division)

Regel III

$$= \frac{9 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^2}$$

$$= \underline{\underline{1.8 \cdot 10^2}}$$

(4) Operationen, die sich gegenseitig aufheben

Operation

Beispiel

$$+ / -$$

$$\text{Zahl} + 1 - 1 = \text{Zahl}$$

$$\cdot / \div$$

$$\frac{\text{Zahl} \cdot 2}{2} = \text{Zahl}$$

$$(\dots)^2 / \sqrt{\dots}$$

$$\sqrt{\text{Zahl}^2} = \text{Zahl}$$

$$(\dots)^3 / \sqrt[3]{\dots}$$

$$\sqrt[3]{\text{Zahl}^3} = \text{Zahl}$$

$$(\dots)^4 / \sqrt[4]{\dots}$$

$$\sqrt[4]{\text{Zahl}^4} = \text{Zahl}$$

⋮

$$(\dots)^n / \sqrt[n]{\dots}$$

$$\sqrt[n]{\text{Zahl}^n} = \text{Zahl}$$

allg.

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Regel VIII

(5)

Wurzeloperation

Kann man die Wurzeloperation als Potenz schreiben?

Bsp: $\sqrt[2]{2^2} \stackrel{?}{=} (2^2)^x$ | Regel VIII

$2^1 = (2^2)^x$ | Regel VI

$2^1 = 2^{2x}$ | Vergleich d. Exp.

$\Rightarrow 1 = 2x$ (Exponenten)

$x = \frac{1}{2}$

d.h. $\sqrt[2]{2^2} = (2^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\sqrt[2]{\dots} = (\dots)^{\frac{1}{2}}$$

entsprechend:

$$\sqrt[3]{\dots} = (\dots)^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[4]{\dots} = (\dots)^{\frac{1}{4}}$$

⋮

$$\sqrt[n]{\dots} = (\dots)^{\frac{1}{n}}$$

Bem:

D.h. die Regeln I - VI gelten auch für Wurzeloperationen!

Konkret braucht man:

$$(II) \quad \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$$

$$(IV) \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

$$(VI) \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Und zusätzlich:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{3^2} &= (3^2)^{\frac{1}{4}} \\ &= 3^{2 \cdot \frac{1}{4}} \\ &= 3^{\frac{1}{4} \cdot 2} \\ &= \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt[4]{3}\right)^2 \end{aligned}$$

d.h. $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$ (Regel VIII)