Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ermöglicht eine Prognose über ein Experiment mit zufälligem Ausgang. Zufälligkeit bedeutet hier Unvorhersehbarkeit. Ein anschauliches Beispiel sind Experimente mit einem Würfel oder das blinde Herausgreifen farbiger Kugeln aus einer Urne, da das konkrete Resultat nicht vorausgesagt werden kann.

Versuche mit einem Würfel

(1) Die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu würfeln.

$$W(6) = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}} = \frac{1}{6} = 0.1\overline{66} = \underline{\underline{16.6..\,\%}}$$

Überlegung: in einem von sechs Fällen ist die gewürfelte Zahl 6, d.h. von den möglichen Ausgängen unseres Würfelexperiments (1,2,3,4,5,6), ist die Zahl 6 der günstige Fall.

Vorgehen: wir bilden das Verhältnis von günstigen Fällen zu möglichen Fällen.

Ergebnis: Mit der Wahrscheinlichkeit von ≈16.7% erzielen wir beim Würfeln eine „6“.

Versuche mit zwei Würfeln

(2) Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine „6“ zu würfeln. Dabei spielt es keine Rolle, ob man zweimal würfelt oder einmal mit zwei Würfeln würfelt.

Ereignisliste: 1. Würfel / 2. Würfel

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

Ereignisse, wo mindestens eine „6“ vorkommt

Mit einer Ereignisliste kann man die möglichen Fälle und die günstigen Fälle (Ereignisse) direkt abzählen.

$$W(\text{mind. eine „6“}) = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}} = \frac{11}{36} = 0.30\overline{55} = \underline{\underline{30.\overline{55}\,\%}}$$

Wir bilden das Verhältnis von günstigen Fällen zu möglichen Fällen.

(3) Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 6 Augen zu würfeln.

Ereignisliste: 1. Würfel 2. Würfel

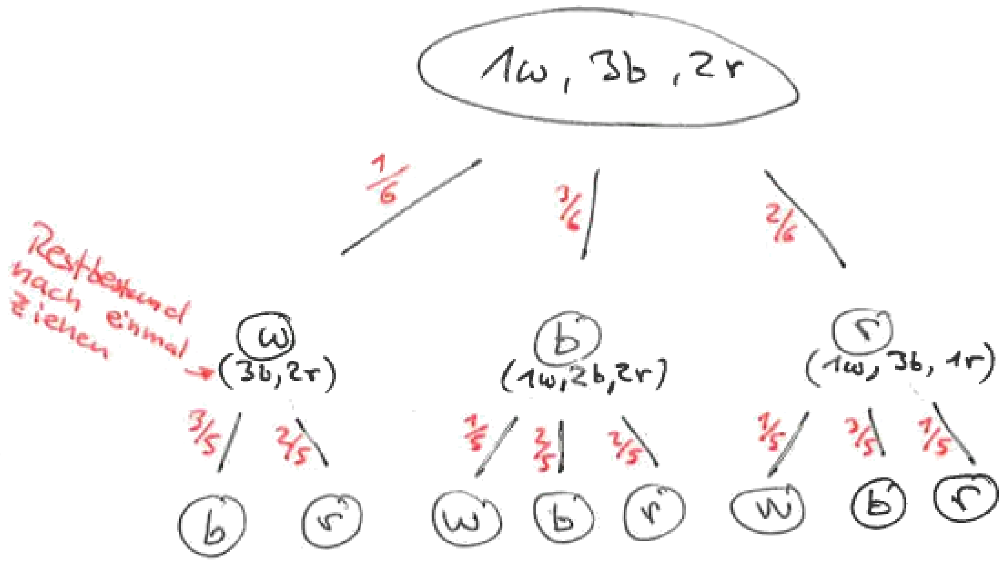
11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

(Ereignisse, wo mindesten 6 Augen vorkommen

$$W(\text{Augenzahl} \geq 6) = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}} = \frac{26}{36} = 0.7\overline{22} = 72.\overline{22}\,\%$$

Farbige Kugeln blind aus einer Urne ziehen

(4) Es sollen zweimal eine Farbige Kugel aus einer Urne gezogen werden. Es gibt 1 weisse, 3 blaue und 2 rote Kugeln. Hier lohnt es sich, ein Baumdiagramm zu zeichnen.



Ganz oben im Baumdiagramm stehen die Kugeln, die am Anfang in der Urne sind. Die möglichen Verläufe der Ziehung sind als Äste dargestellt. Jeder Ast steht für ein mögliches Ergebnis. Es sind also insgesamt 8 verschiedene Ergebnisse möglich (unterste Zeile). Die Wahrscheinlichkeit für eine Ziehung ist als rote Bruchzahl angegeben. Z.B. zieht man in der ersten Ziehung mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 eine weisse Kugel, da eine von sechs kugeln weiss ist. Danach sind nur noch blaue und rote Kugeln in der Urne. Man kann also mit der Wahrscheinlichkeit 3/5 in der zweiten Ziehung eine blaue Kugel ziehen, da 3 von 5 der verbleibenden Kugeln blau sind.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, zwei blaue Kugeln zu ziehen? D.h. Wir suchen die Wahrscheinlichkeit, in der ersten und in der zweiten Ziehung eine blaue Kugel zu ziehen. Es kommt dafür nur Ast b-b mit den Wahrscheinlichkeiten 3/6 und 2/5 in Frage. Da es sich um aufeinanderfolgende unabhängige Ereignisse handelt, gilt die Produktregel: Die Wahrscheinlichkeiten werden multipliziert.

$$W(b,b) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} = 0.2 = \underline{\underline{20\%}}$$

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, eine blaue und eine rote Kugel zu ziehen? Diese Bedingung erfüllt der Ast b-r oder r-b. Wir addieren also die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der beiden möglichen Ereignisse.

$$W(1b \text{ und } 1r) = \overset{b-r}{\left(\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}\right)} + \overset{r-b}{\left(\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5}\right)} = \frac{2}{5} = 0.4 = \underline{\underline{40\%}}$$

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine blaue Kugel zu ziehen? Wir zählen alle Äste zusammen, die diese Bedingung erfüllen.

$$W(\text{mind. } 1b) = \overset{w-b}{\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}\right)} + \overset{b-w}{\left(\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5}\right)} + \overset{b-b}{\left(\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}\right)} + \overset{b-r}{\left(\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}\right)} + \overset{r-b}{\left(\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5}\right)}$$

$$= \frac{24}{30} = 0.8 = \underline{\underline{80\%}}$$

Tombola

(5) Bei einer Tombola ist jedes fünfte Los ein Gewinn. Die Chance, einen Gewinn zu ziehen, beträgt also 1/5. **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei fünf gekauften Losen mindestens einen Gewinn zu ziehen?** Überlegung: da es heisst „mindestens eine Gewinn“ und nicht „genau einen Gewinn“, können es auch mehrere Gewinne sein. Wir betrachten also die Wahrscheinlichkeit, überhaupt ein Los zu ziehen (Gewinn oder Nichtgewinn) und ziehen davon die Wahrscheinlichkeit keinen Gewinn zu ziehen ab.

$$W(\geq 1) = \underbrace{1}_{W(5\text{ Lose ziehen})} - \underbrace{\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}}_{W(5\text{ Nichtgewinne})}$$

$$= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5$$

$$= 0{,}67232$$

$$\approx \underline{\underline{67{,}2\%}}$$

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens 2 Gewinne zu ziehen? Hier ziehen wir noch die Wahrscheinlichkeit für 1 Gewinn und 4 Nichtgewinne ab. Davon gibt es 5 Fälle, denn der Gewinn kann in der 1., 2., 3., 4. oder 5. Ziehung sein.

$$W(\geq 2) = 1 - \left[\left(\frac{4}{5}\right)^5 + \underbrace{5\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4}_{W(1\text{ Gewinn, }4\text{ Nichtgewinne})}\right]$$

$P_4(5)$; Permutation 1 Gewinn, 4 Nichtgewinne

$$= 0{,}26272$$

$$\approx \underline{\underline{26{,}3\%}}$$

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens 3 Gewinne zu ziehen? Hier ziehen wir noch die Wahrscheinlichkeit für 2 Gewinne und 3 Nichtgewinne ab. Davon gibt es 10 Fälle (Permutation von 5, bei 2 und 3 gleichen Elementen).

$$W(\geq 3) = 1 - \left[\left(\frac{4}{5}\right)^5 + 5\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4 + \underbrace{10\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3}_{W(2\text{ Gewinne, }3\text{ Nichtgewinne})}\right]$$

$P_{3,2}(5)$; Permutation 2 Gewinne, 3 Nichtgewinne

$$= 0{,}0579$$

$$= \underline{\underline{5{,}79\%}}$$